УДК 517.4

М. В. Кретов, Н. В. Виноградова, О. В. Воротникова

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БОХНЕРА

Найдено необходимое и достаточное условие почти периодичности преобразования Бохнера в банаховом пространстве.

Necessary and the sufficient condition almost periodicity of conversion of the Bochner in Banach space is found.

Ключевые слова: почти периодическая функция, банахово пространство, преобразование Бохнера, компактность, равномерная непрерывность, относительная плотность, ε-почти период.

Key words: almost periodic function, Banach space, conversion of the Bochner, compactness, uniform continuity, the relative density, ε-almost the period.

Пусть дано банахово пространство E [1] и банахово пространство C_E всех непрерывных и ограниченных функций $f(t)$ $(t \in (-\infty, \infty))$ в пространстве E. Элемент в C_E, соответствующей функции $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, обозначим через $\tilde{f}$. Норма элемента в C_E вводится следующим образом:

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{C_E} = \sup_{-\infty<t<+\infty} \left\|f(t)\right\|_E .$$

Положим $\tilde{f}(s) = \{f(t+s);\, t,\ s \in (-\infty;\infty)\}$. Преобразованием Бохнера называется отображения $s \to \tilde{f}(s)$, то есть отображение из $(-\infty, \infty)$ в C_E, при этом $\tilde{f}(0) = \tilde{f}$. Область значений преобразований Бохнера обладает следующими свойствами:

1) состоит из точек сферы, так как

$$\left\|\tilde{f}(s)\right\|_{C_E} = \sup_{-\infty<t<\infty} \left\|f(t+s)\right\|_E = \sup_{-\infty<t<\infty} \left\|f(t)\right\|_E = \left\|\tilde{f}(0)\right\|_{C_E} ;$$

2) сохраняет расстояние, так как

$$\left\|\tilde{f}(s+\tau) - \tilde{f}(s)\right\|_{C_E} = \sup_{-\infty<t<\infty} \left\|f(t+s+\tau) - f(t+s)\right\|_E =$$

$$= \sup_{-\infty<t<\infty} \left\|f(t+\tau) - f(t)\right\|_E = \left\|\tilde{f}(\tau) - \tilde{f}(0)\right\|_{C_E} ;$$

3) функция $f(t)$ почти периодична тогда и только тогда, когда почти периодична функция $\tilde{f}(s)$ с тем же почти периодом;

4) из определения Бохнера [2] почти периодической функции со значениями в банаховом пространстве следует, что для того, чтобы функция $\tilde{f}(s)$ была почти периодической, необходимо и достаточно, чтобы область значений преобразований Бохнера была относительно компактный.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Для того чтобы преобразование Бохнера* $\tilde{f}(s)$ *было почти периодической функцией, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая относительно плотная на действительной оси последовательность чисел* $\{s_n\}$, *для которой соответствующая последовательность* $\{\tilde{f}(s_n)\}$ *была относительно компактной.*

Доказательство. Необходимость следует из того, что область значений преобразований Бохнера относительно компактна, то есть любая последовательность $\{\tilde{f}(s_n)\}$ относительно компактна.

Докажем достаточность. Сначала докажем, что для любого числа $\varepsilon > 0$ множество ε-почти периодов $\{\tau\}_\varepsilon$ относительно плотно.

Так как последовательность $\{\tilde{f}(s_n)\}$ относительно компактна, то существует k значений, зависящих от ε: $\tilde{f}(s_{1,0}), \tilde{f}(s_{2,0}), \ldots, \tilde{f}(s_{k,0})$ таких, что для любого натурального числа справедливо

$$\tilde{f}(s_n) \in \bigcup_{j=1}^{k} (\tilde{f}(s_{j,0}), \varepsilon),$$

где $(\tilde{f}, \varepsilon)$ обозначает открытую сферу с центром $\tilde{f}$ и радиусом ε.

Разобьем последовательность $\{\tilde{f}(s_n)\}$ на k подпоследовательностей $\{\tilde{f}(s_{j,n})\}$ таких, что для любого числа j $\left\|\tilde{f}(s_{j,n}) - \tilde{f}(s_{j,0})\right\|_{C_E} < \varepsilon$.

Согласно свойству 2 области значений преобразований Бохнера это означает, что $\left\|\tilde{f}(s_{j,n}) - \tilde{f}(s_{j,0}) - \tilde{f}(0)\right\|_{C_E} < \varepsilon$, значит, $\tau_{j,n} = s_{j,n} - s_{j,0}$ есть почти период.

Докажем, что множество $\bigcup_{j=1}^{k} \{\tau_{j,n}\}$ есть относительно плотное множество чисел. Пусть число $d > 0$ — длина интервала, в каждом из которых есть член последовательности $\{s_n\}$. Положим

$$m = \min_{j \in [1,k]} \{-s_{j,0}\}, \;\; M = \max_{j \in [1,k]} \{-s_{j,0}\}, \;\; e = M - m + d.$$

Рассмотрим интервал $(a < a + 1)$, где число a произвольно. Интервал $(a - m,\ a - m + d)$ содержит хотя бы одну точку s_{j_1,n_1} последовательности $\{s_n\}$, следовательно, из равенств (6) следует: $a - m + m \leqslant s_{j_1,n_1} - s_{j_1,0} \leqslant$

$\leqslant a - m + d + M$, то есть, учитывая (5), получаем $a \leqslant \tau_{j_1,n_1} \leqslant a + l$. Значит, множество $\bigcup_{j=1}^{k} \{\tau_{j,n}\}$ — относительно плотное множество чисел.

Докажем теперь, что функция $\tilde{f}(s)$ непрерывна. Из свойства 2 области значений преобразований Бохнера следует, что для этого нужно доказать, что функция $f(t)$ равномерно непрерывна. Для этого положим $\Delta = \{-d \leqslant \zeta \leqslant d\}$. Пусть $z = C(\Delta, E)$ есть непрерывное преобразование всех функций $z(\zeta)$ из промежутка Δ в банахово пространство E, следовательно, $z = \{z(\zeta);\, \zeta \in \Delta\}$, $\|z\|_{\bar{E}} = \max_{\Delta} \|z(\zeta)\|_{E}$. Положим $z_n = \{f(\zeta + s_n);\, \zeta \in \Delta\}$. Так как $\|z_n - z_m\|_E \leqslant \left\|\tilde{f}(s_n) - \tilde{f}(s_m)\right\|_{C_E}$, то последовательности $\{z_n\}$ и $\{\tilde{f}(s_n)\}$ относительно компактны. Так как функция $f(t)$ непрерывна, то функция $f(\zeta + s_n)$ равномерно непрерывна на отрезке Δ, значит, каждому числу $\varepsilon > 0$ соответствует число δ_ε, $0 \leqslant \delta_\varepsilon \leqslant \dfrac{d}{2}$, такое, что для любых чисел ζ' и ζ'' из промежутка Δ и любого натурального числа n из неравенства $|\zeta' - \zeta''| \leqslant \delta_\varepsilon$ следует неравенство $\|f(\zeta' + s_n) - f(\zeta'' + s_n)\|_E \leqslant \varepsilon$.

Выберем произвольное число $\bar{t} \in (-\infty; \infty)$, тогда существует число $s_{\bar{n}} \in \left(\bar{t} - \dfrac{d}{2}, \bar{t} + \dfrac{d}{2}\right)$, следовательно, $\bar{t} = \bar{\zeta} + s_{\bar{n}}$, где $|\bar{\zeta}| \leqslant \dfrac{d}{2}$. Пусть теперь имеет место неравенство $|t - \bar{t}| \leqslant \delta_\varepsilon$ и положим $t = \zeta + s_{\bar{n}}$. Тогда будут выполняться неравенства $|\zeta| \leqslant d$ и $|\zeta - \bar{\zeta}| = |t - \bar{t}| \leqslant \delta_\varepsilon$, откуда следует $\|f(t) - f(\bar{t})\|_E = \|f(\zeta + s_{\bar{n}}) - f(\bar{\zeta} + s_{\bar{n}})\|_E \leqslant \varepsilon$. Значит, функция $f(t)$ равномерно непрерывна на рассматриваемом промежутке. Теорема доказана.□

Эта теорема позволяет упростить определение Бохнера [2] почти периодической функции со значениями в Банаховом пространстве.

Список литературы

1. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., 1968.

2. *Кретов М. В.* О почти периодических функциях со значениями в банаховом пространстве // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Вып. 4. 2010. С. 162—166.

Об авторах

Михаил Васильевич Кретов — канд. физ.-мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта, e-mail: kretov20062006@yandex.ru

Наталья Викторовна Виноградова — ст. преп., РГУ им. И. Канта, e-mail: natavino@yandex.ru

Ольга Владимировна Воротникова — ст. преп., РГУ им. И. Канта, e-mail: vorotnikova1@narod.ru

Authors

Dr Michail Kretov — assistant professor, IKSUR, e-mail: kretov20062006@ yandex.ru

Natalya Vinogradova — high instructor, IKSUR, e-mail: natavino@yandex.ru

Olga Vorotnikova — high instructor, IKSUR, e-mail:vorotnikova1@narod.ru